UNDERSØGELSER OVER LIGNINGERNES THEORI.

AF

J. L. W. V. JENSEN.

MINE Undersøgelser, af hvilke jeg her skal fremdrage nogle enkelte Punkter, strækker sig mere end 25 Aar tilbage. Jeg har hidtil intet publiceret deraf, dels fordi det Materiale, jeg samlede, var i en vis om end langsom Voksen, dels fordi min praktiske Virksomhed kun levner mig ringe Tid til videnskabelig Publikation. De omtalte Undersøgelser er nu i det væsentlige afsluttede, og det er min Hensigt, efterhaanden som min Tid og mit Helbred tillader det, at publicere dem paa Dansk i en Række af omtrent 5 Afhandlinger i Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, medens en fransk Oversættelse vil fremkomme i Acta Mathematica efter Aftale med Prof. *Mittag-Leffler*.

Indholdet af den 1ste Afhandling har jeg allerede forelagt i et Møde i Videnskabernes Selskab d. 5. Maj 1911, medens et Punkt af den 2den Afhandling er benyttet til et Foredag i Mathematisk Forening d. 16. Marts s. A. Det er herhenhørende Sætninger, som jeg her skal tillade mig at fremsætte og tildels bevise.

Den vigtigste Gren af Ligningernes Theori — naar man ser hen til Anvendelserne paa Naturvidenskaberne eller andre Dele af Mathematiken — er den, som beskæftiger sig med Adskillelsen og den tilnærmede Beregning af Rødderne i en forelagt Ligning, eller som man ogsaa kan sige, Rødderne eller Nulpunkterne af en algebraisk eller transcendent Funktion.

For de algebraiske Ligningers Vedkommende vilde man være tilbøjelig til at paastaa, at Emnet i det væsentlige var udtømt ved Arbejder af Mestre som *Rolle*, *Descartes*, *Newton*, *Lagrange*, *Fourier*, *Cauchy*, *Gauss*, *Sturm*, *Jacobi*, *Borchardt*, *Sylvester*, *Hermite* og *Brioschi*. Hertil maa føjes mindre bekendte men vigtige Arbejder af *de Gua* (Histoire de l'Académie Royale des Sciences, 1741, S. 92—95 & S. 95 og Mémoires . . . ., S. 72—96 & S. 435—494), hvori bl. A. Descartes' Regel bevises for første Gang og paa en simpel Maade, der senere er genfunden af Laguerre og fremsat af ham som ny, *Waring* (Miscellanea analytica, 1762 og Meditationes algebraicæ, 1770), *Campbell*, Kommentator til Newtons Arithmetica Universalis (Philosophical Transactions, Nr. 404, oversat til Latin og føjet til den 3die Udgave af Arithmetica, 1732), *Olivier*, der simpelt og smukt beviser en Sætning af Campbell for første Gang (Crelle's Journal, B. 1), og endelig last but not least *Laguerre's* mangeartede Undersøgelser fra Begyndelsen af 80'erne.

For de transcendente Funktioners Vedkommende er Forholdet et ganske andet. Her savner man Methoder til Behandling af Funktioner af mere almindelig Form. Dette er saa meget mere mærkeligt, som store Problemer venter paa deres Løsning af Mangel paa saadanne Methoder. Jeg behøver blot at minde om den endelige Løsning af Primtalproblemet, hvor det kommer an paa at vise, at en af *Riemann* i Taltheorien indført Funktion $\zeta(s)$ har alle sine imaginære Rødder af Formen $\frac{1}{2} + \alpha i$, hvor α er reel. Ved mine Undersøgelser er jeg netop gaaet ud paa Løsningen af det Riemann'ske Problem. I en Del Aar var disse Bestræbelser resultatløse, indtil jeg indsaa, at man maatte skaffe sig saa mange forskellige Methoder som muligt til Behandling af Klasser af transcendente Funktioner, dels ved Generalisation af bekendte Sætninger om Separation og Antal af Rødder i hele rationale Funktioner og Udvidelse heraf til transcendente Funktioner, dels ved Opstilling af nye Sætninger for de sidstnævnte. Vi skal her se Eksempler paa begge Dele.

Ved mine Undersøgelser er jeg ikke gaaet ud fra den mest almindelige Sætning, man kender, angaaende Adskillelsen af Rødderne i en hel rational Funktion med reelle Kofficienter, nemlig Sturm's Sætning, der — i alt Fald theoretisk — tillader en fuldstændig Diskussion. Vel har *Borchardt*, ved Hjælp af Sturm's Theorem eller rettere ved Hjælp af de Sylvester'ske Udtryk for de Sturm'ske Funktioner, vist hvorledes man kan opstille en Række af symmetriske Determinanter, som afhænger af Potenssummerne af Rødderne, og

hvis Fortegn bestemmer Antallet af de imaginære Rødder. Forsøger man at lade Graden af den givne rationale Funktion vokse i det uendelige, bliver disse Determinanter alle uendelige eller ubestemte og saaledes uden Betydning. Dette er imidlertid ingen virkelig Vanskelighed, thi man kan uden synderligt Besvær omdanne Determinanterne, saa at de i Stedet for Summer af de positive Potenser af Rødderne indeholder negative Potenser og bliver konvergente for hele Funktioner af en given endelig Rang. Vanskelighederne ligger paa andre Steder. Den komplicerede Form af de Udtryk, man betragter, er saa stor, at det allerede er haabløst ad denne Vej at ville forsøge paa i Praksis at bestemme Karakteren af Rødderne i en given rational Funktion. Saa meget mere gælder dette for de transcendente Funktioner. Det er derfor andre og mere specielle Methoder, som jeg til en Begyndelse har kastet mig over.

Naar en hel Funktion af x,

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

har alle sine Koefficienter reelle, og altsaa er, hvad jeg for Kortheds Skyld kalder for en »reel« Funktion, har Funktionen som bekendt de imaginære[1]) Rødder parvis konjugerede. Besidder en saadan Funktion netop τ Par imaginære Rødder, hvor τ kan være Nul, hel positiv eller uendelig, siger jeg for Kortheds Skyld, at Funktionens »Type« er τ. Saaledes er f. Eks. $(1 + x)^n$, e^x, e^{x^2} af Typen $\tau = 0$, medens $(1 + x^2)^n$ er af Typen $\tau = n$.

Der er en bekendt Sætning af Cauchy, som spiller en stor Rolle i mine Undersøgelser, og som i specialiseret Form kan udtales paa følgende Maade: Naar den reelle hele Funktion $F(x, t)$ afhænger af en reel Parameter t, der er bunden til en kontinuert eller diskret Værdirække, for $\lim t = t_0$ og for endelige Værdier af $|x|$ *ligeligt* konvergerer imod den hele Funktion $F(x, t_0)$, vil Rødderne i $F(x, t)$ konvergere imod Rødderne i $F(x, t_0)$. Under den Forudsætning, at Typen af $F(x, t)$ har en endelig højere Grænse, naar t nærmer sig t_0, ser man uden Vanskelighed, at Typen af $F(x, t_0)$ maa være $\leq$ Typen af $F(x, t)$, thi de imaginære Rødder kan konvergere imod reelle Grænseværdier, men ikke omvendt.

Vi skal nu se nogle Anvendelser af Rolle's Theorem og Udvidelser deraf, som er af Vigtighed.

---

[1]) Jeg bruger stedse Betegnelsen »imaginære Rødder« om de, der er komplekse, men ikke reelle. Den upræcise Betegnelse »komplekse Rødder« ser man ofte anvendt.

Lad

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

være en hel rational Funktion af m^{te} Grad, reel og af Typen τ. Den har da $m - 2\tau$ reelle Rødder, og ifølge Rolle's Sætning, vil $f'(x)$ have et ulige Antal reelle Rødder imellem hver to paa hinanden følgende i $f(x)$, hvorved der paa bekendt Maade maa tages Hensyn til mulige flerdobbelte Rødder. $f'(x)$ har altsaa $m - 2\tau - 1 + 2k_1$ reelle Rødder, hvor k_1 er Nul eller et helt positivt Tal. Betegnes Typen af $f'(x)$ ved τ', haves saaledes $m - 2\tau - 1 + 2k_1 = m - 1 - 2\tau'$ eller $\tau - \tau' = k_1$. Anstiller man samme Betragtning for $f'(x), f''(x), \cdots f^{(m-2)}(x)$, er med let forstaaelige Betegnelser $\tau - \tau^{(m-1)} = \tau = k_1 + k_2 + \cdots + k_{m-1}$. Hvis man udtrykte sig saaledes: Rolle's Sætning viser, at $f'(x)$ normalt har een reel Rod, beliggende i hvert Rodinterval af $f(x)$, og desuden i det Hele $2k_1$ »andre« reelle Rødder, kunde man udtrykke det nys beviste saaledes: Typen af $f(x)$ er lig med det halve Antal af »andre« reelle Rødder i $f'(x), f''(x), \cdots f^{(m-1)}(x)$. Det er indlysende, at Typen af en hel rational Funktion ikke kan vokse ved Differentiation, hvilket iøvrigt er vel bekendt.

Lad atter $F(x)$ være en reel, hel, rational eller transcendent Funktion, af hvilken vi danner en hel, rational paa følgende Maade. Vi lader Symbolet $F(D)$, hvor D betegner Differentiationssymbolet med Hensyn til x, operere paa x^p, hvor p er et helt positivt Tal. Vi faar derved med den sædvanlige Betegnelse for Binomialkoefficienter

$$F(D)\cdot x^p = F(0)\, x^p + \binom{p}{1} F'(0)\, x^{p-1} + \binom{p}{2} F''(0)\, x^{p-2} + \cdots + F^{(p)}(0) = F_p(x),$$

som er højst af p^{te} Grad. Da

$$F'_p(x) = p F_{p-1}(x),$$

kan Typen af $F_p(x)$ aldrig aftage med voksende p. Lad os betragte Funktionen

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{x}{p}\right)^p F_p\left(\frac{p}{x}\right) = F(0) + \frac{F'(0)}{\underline{|1}}\, x + \frac{F''(0)}{\underline{|2}}\left(1 - \frac{1}{p}\right) x^2 + \cdots \\ + \frac{F^{(p)}(0)}{\underline{|p}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{2}{p}\right)\cdots\left(1 - \frac{p-1}{p}\right) x^p, \end{aligned} \right.$$

som øjensynlig er af nøjagtig samme Type som $F_p(x)$. Man ser nu meget let, at Funktionen (1), for $|x|$ endelig, konvergerer *ligeligt* imod $F(x)$ for p voksende i det uendelige. Beviset er saa simpelt ved

Hjælp af de bekendte Cauchy-Weierstrass'ske Uligheder for Koefficienterne i en Potensrække, at jeg her kan forbigaa det.

Hvis vi kan vise, at Typen af $F_p(x)$ for alle p, har en endelig højere Grænse γ, vil derfor Typen af $F(x)$ være $\leqq \gamma$. Dette *Princip* finder mange Anvendelser i mine Undersøgelser; nogle vigtige Eksempler herpaa skal vi se i det følgende.

I *Waring's* Meditationes algebraicæ findes Beviset for en Sætning, som kan udtrykkes paa følgende Maade.

Naar $f(x)$ er en hel, rational Funktion, reel og af Typen τ, samt a er en reel Konstant, vil

$$af(x) + f'(x) = (a + D)\cdot f(x) \tag{2}$$

højst være af Typen τ. Man beviser dette ganske simpelt ved at anvende Rolle's Theorem paa $e^{ax}f(x)$, idet

$$D(e^{ax}f(x)) = e^{ax}(af(x) + f'(x)).$$

Gentager vi Operationen $(a + D)$ n Gange med forskellige eller lige store a, har vi hermed bevist en Sætning af *Poulain*, som kan udtrykkes saaledes:

Naar $g(x)$ er en hel rational Funktion, reel og af Typen o, og $f(x)$ er af Typen τ, vil

$$g(D)\cdot f(x) = g(0)f(x) + \frac{g'(0)}{\underline{|1}}f'(x) + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{\underline{|n}}f^{(n)}(x) \tag{3}$$

højst være af Typen τ. Dette er iøvrigt vel bekendt. Men lad os nu i (2) erstatte $f(x)$ med $e^{bx}f(x)$, hvor b er en reel Konstant. Vi finder, at

$$(a + D)\cdot e^{bx}f(x) = e^{bx}\ ((a + b)f(x) + f'(x))$$

højst er af Typen τ, og følgelig er Poulain's Theorem udvidet til at gælde, naar $f(x)$ erstattes med $e^{bx}f(x)$.

Lad nu $F(x)$ være en reel hel, transcendent Funktion af o[te] eller 1[ste] Rang og af den endelige Type τ. Lad

$$F_n(x) = ce^{c_n x}x^{\mu}\prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{x}{\alpha_\nu}\right)e^{\frac{x}{\alpha_\nu}},\ ^{1)}$$

¹) Som ikke maa forveksles med Betegnelsen S. 54.

hvor $e^{c_n x}$ er den ydre eksponentielle Faktor[1]), α_ν betegner Rødderne i $F(x)$, og n er saa stor, at alle de imaginære Rødder er medtagne i det kanoniske Produkt. Da gælder, som vi lige har vist, Poulain's Theorem for Funktionen F_n, og da ifølge Weierstrass Produktet konvergerer ligeligt imod $F(x)$ for $n = \infty$, for ethvert endeligt $|x|$, er hermed *Poulain's Theorem udvidet til at gælde, naar* $f(x)$ *erstattes med en Funktion af* 0^te^ *eller* 1^ste^ *Rang og af Typen* τ.

En endnu almindeligere Sætning er følgende:

Naar $g(x)$ *er hel rational af* n^te^ *Grad og af Typen* 0, *medens* $F(x)$ *er hel transcendent af* $2q$^te^ *eller* $2q+1$^ste^ *Rang og af Typen* τ, *vil* $g(D)\cdot F(x)$ *højst være af Typen* $\tau + qn$.

Andre Generalisationer af Poulain's Theorem, som gaar ud paa Udvidelse af $g(x)$, maa jeg her forbigaa. Der er dog et specielt Tilfælde som fordrer særlig Omtale.

Lad os i (3) tage $f(x) = x^p$. Da følger, at $g(D)\cdot x^p$ er af Typen 0. Vi kan heri erstatte $g(x)$ med $e^{cx}g(x)$, hvor c er reel; thi Anvendelse af Operatoren e^{cD} paa den hele, rationale Funktion $g(D)\cdot x^p$ fører[2]) ifølge Taylor's Formel til $g(D)\cdot(x+c)^p$. Og ved at ræsonnere som ovenfor, har vi følgende Sætning:

Naar $G(x)$ er en reel hel Funktion af 0^te^ eller 1^ste^ Rang og af Typen 0, vil $G(D)\cdot x^p$ være af Typen 0.

Denne Sætning var *Laguerre* bekendt i et specielt Tilfælde. Jeg skal imidlertid nu vise, at Sætningen gælder for Funktioner af vilkaarlig endelig Type.

Lad

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

være reel og af Typen τ, og lad q være et helt positivt Tal $\geq m$, da er

$$x^q f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 x^q + a_1 x^{q-1} + \cdots + a_m x^{q-m},$$

ligeledes nøjagtig af Typen τ. Differentierer jeg den sidste Funktion $q-p$ Gange med Hensyn til x, idet p er hel positiv og $< q$, er ifølge Rolle's Theorem

---

[1]) Naar F er af 1^ste^ Rang, er c_n konstant, men naar F er af 0^te^ Rang, er $c_n = -\sum_1^n \frac{1}{\alpha_\nu}$.

[2]) Jeg forudsætter, at man kender de simpleste Regler for eksakt Regning med distributive Operationer.

$$D^{q-p}\left(x^q f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\underline{|q}}{\underline{|p}}\left(a_0 x^p + a_1 \frac{p}{q} x^{p-1} + a_2 \frac{p(p-1)}{q(q-1)} x^{p-2} + \cdots\right) = \frac{\underline{|q}}{\underline{|p}} \varphi_q(x)$$

højst af Typen τ. Nu er øjensynlig

$$\lim_{q=\infty} q^p \varphi_q\left(\frac{x}{q}\right) = a_0 x^p + p a_1 x^{p-1} + p(p-1) a_2 x^{p-2} + \cdots = f(D)\cdot x^p$$

højst af Typen τ.

Ved at ræsonnere som ovenfor, udvides dette til at gælde for en hel transcendent Funktion $F(x)$ af 0^{te} eller 1^{ste} Rang og af Typen τ, og kombinerer jeg dette med det tidligere beviste Princip, har jeg hermed fundet følgende fundamentale Sætning:

Naar $F(x)$ er en reel hel transcendent Funktion af 0^{te} eller 1^{ste} Rang af den endelige Type τ, vil den hele rationale Funktion $F(D)\cdot x^p$ højst være af Typen τ, og er omvendt den sidste for ethvert p højst af Typen τ, vil $F(x)$ højst være af Typen τ. For et vist p og alle større er Typen af $F(D)\cdot x^p$ netop lig med Typen af $F(x)$.

Denne Sætning, som i Parentes bemærket, *ikke* gælder for hele Funktioner af 2^{den} og højere Rang, spiller en stor Rolle i mine Undersøgelser.

Et Eksempel fra mine senere Undersøgelser vil vise, hvilken Nytte man kan drage deraf. *E. Malo*[1]) har ved en forenet Anvendelse af Descartes' og Sturm's Sætninger bevist den meget smukke Sætning, at naar de hele reelle Funktioner

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

og

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n,$$

begge har lutter reelle Rødder, og den sidstes Koefficienter alle er *positive*, saa vil

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 x^1 + a_2 b_2 x^2 + \cdots$$

ligeledes have alle sine Rødder reelle.

Lad $F(x)$ og $G(x)$ være reelle hele transcendente Funktioner af 0^{te} eller 1^{ste} Rang og af Typen 0, og lad $G(x)$ have lutter positive Koefficienter, da er $F(D)\cdot x^p$ og $G(D)\cdot x^p$ hele rationale Funktioner, hvorpaa jeg kan anvende Malo's Theorem. Jeg faar altsaa, at

$$\sum_{\nu=0}^{p} F^{(\nu)}(0)\, G^{(\nu)}(0) \binom{p}{\nu}^2 x^{p-\nu}$$

---

[1]) Journal de Mathématiques spéciales, 4^e série t. IV, 1895.

er af Typen o. Sætter vi heri $\frac{p^2}{x}$ for x og multiplicerer med $\left(\frac{x}{p^2}\right)^p$, faar vi

$$\sum_{\nu=0}^{p} \frac{F^{(\nu)}(0)}{\underline{|\nu}} \frac{G^{(\nu)}(0)}{\underline{|\nu}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^2 \left(1-\frac{2}{p}\right)^2 \cdots \left(1-\frac{\nu-1}{p}\right)^2 x^\nu.$$

Lader vi p vokse i det uendelige, konvergerer dette *ligeligt* imod

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(0)}{\underline{|\nu}} \frac{G^{(\nu)}(0)}{\underline{|\nu}} x^\nu.$$

Hermed er Malo's Sætning udvidet til hele transcendente Funktioner af Rangen o *eller* 1. En direkte Anvendelse af Malo's Methode vilde i dette Tilfælde have været umulig.

En af de vigtigste Anvendelser, man kan gøre af Sætningen, henhører til den sidste Del af mine Undersøgelser, og skønt jeg ikke her uden indgaaende Referat af de mellemliggende Undersøgelser kan meddele Slutresultaterne i forstaaelig Form, kan jeg gøre en Antydning. Den sidste i Rækken af mine 5 forhen omtalte Afhandlinger vil komme til at beskæftige sig med en Klasse af hele, transcendente Funktioner af 1ste Rang

$$F(x) = \int_0^\infty \Psi(\alpha) \cos \alpha x d\alpha, \tag{4}$$

hvor den reelle Funktion $\Psi(\alpha)$ kan differentieres et ubegrænset Antal Gange og aftager saaledes med voksende α, at man har

$$\lim_{\alpha=\infty} \Psi^{(\nu)}(\alpha) \cos \alpha x = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

naar x ligger i en endelig Afstand fra Nulpunktet i den komplekse Talplan. Denne Klasse af Funktioner har en særlig Vigtighed, fordi den Riemann'ske ξ-Funktion

$$\xi(t) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)(s-1)\zeta(s), \quad s = \tfrac{1}{2} + it,$$

indgaar som specielt Tilfælde heri. Man har nemlig

$$\xi(x) = \int_0^\infty \Phi(\alpha) \cos \alpha x d\alpha,$$

hvor

$$\Phi(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(8\pi^2 e^{\frac{9}{2}\alpha} \nu^4 - 12\pi e^{\frac{5}{2}\alpha} \nu^2 \right) e^{-\nu^2 \pi e^{2\alpha}}.$$

Jeg stiller mig nu den Opgave at undersøge i Almindelighed, hvilke Betingelser $\Psi(\alpha)$ maa opfylde for, at (4) skal være af Typen 0. Anvendes vor fundamentale Sætning paa (4), ser vi straks, *at* $F(x)$ *da og kun da er af Typen* 0, *naar den hele rationale Funktion af* p^{te} *Grad,*

$$F(D)\cdot x^p = \int_0^{\infty} \Psi(\alpha) \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{p}{2}\right]} \binom{p}{2\nu} (-1)^{\nu} x^{p-2\nu} \alpha^{2\nu} \, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Psi(\alpha) \left((x + \alpha i)^p + (x - \alpha i)^p \right) d\alpha$$

ligeledes er af Typen 0 *for ethvert* p. Det lykkes mig at opstille nødvendige Betingelser herfor; disse leder ved Anvendelse af Resultater af andre af mine Undersøgelser til tilstrækkelige, men ikke nødvendige Betingelser, og disse omfatter heldigvis ξ-Funktionen. Selve Verifikationen af Betingelserne fordrer imidlertid paa Grund af den komplicerede Form for $\Phi(\alpha)$ et meget betydeligt Regnearbejde. Ved ovenstaaende har jeg reduceret det Riemann'ske Problem fra at være et transcendent til at være et algebraisk.

Inden jeg gaar videre til Beviset for en Sætning, som vil blive publiceret i min Afhandling Nr. 2, maa jeg meddele nogle yderligere Resultater af min første Afhandling. Jeg indskrænker mig ikke til at bestemme Typen af de Klasser af Funktioner, jeg behandler, men jeg finder ogsaa Grænser for de imaginære Rødder. *Gauss* har bevist følgende Sætning: Naar $f(x)$ er en hel rational Funktion med komplekse Koefficienter, og vi i den komplekse x-Plan afsætter alle Rødder i $f(x)$, vil Rødderne i $f'(x)$ ikke falde udenfor den mindste konvekse Polygon, som omslutter de førstnævnte Rødder[1]). Beviset føres meget let ved Hjælp af den logarithmiske Deriverede og ved at bemærke, at ingen Rod i $f'(x)$ kan ligge paa den ene Side af en ret Linie, naar Rødderne i $f(x)$ alle ligger paa den anden Side af Linien eller paa denne.

---

[1]) Denne Sætning synes lidet bekendt. Den er opdaget paa ny et ikke ringe Antal Gange af forskellige Mathematikere.

For en hel, *reel* Funktion $F(x)$ af 0^{te} eller 1^{ste} Rang kan man finde en mere præcis Sætning. Vi danner en Figur, som bestaar af den reelle Akse og af de Cirkler, hvis Diametre ender i hvert sit Par af de konjugerede imaginære Rødder. Jeg beviser da, at intet Rodpunkt af $F'(x)$ kan falde udenfor Figuren, og det samme gælder $aF(x)+F'(x)$, hvor a er reel. *Samme Sætning gælder for* $g(D)\cdot F(x)$, *hvor* $g(x)$ *er reel hel, rational, af* n^{te} *Grad og af Typen* 0; *kun skal Cirklerne erstattes med Ellipser, hvis smaa Akser ender i hvert sit Par af de konjugerede Rødder af* $F(x)$, *medens de store Akser er* $\sqrt{n}$ *Gange saa store.*

Er Rødderne i $F(x)$ alle begrænsede til Strimlen $-\eta < \Re\left(\frac{x}{i}\right) < \eta$, vil Rødderne i $g(D)\cdot F(x)$ have samme Begrænsning, o. s. v.

Jeg maa endnu nævne en Sætning, som omfatter en stor Del af de hidtil i Litteraturen behandlede transcendente Ligninger som specielle Tilfælde.

Er

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

reel af 0^{te} *eller* 1^{ste} *Rang og af Typen* τ, $H(x)$ *reel af* 0^{te} *eller* 1^{ste} *Rang, af Typen* 0 *og med* h *positive Rødder, samt* $K(x)$ *reel af* 0^{te} *Rang, af Typen* 0 *og med alle Rødder negative, vil*

$$a_0 H(0) + a_1 \frac{H(1)}{K(0)} x + a_2 \frac{H(2)}{K(0)\,K(1)} x^2 + a_3 \frac{H(3)}{K(0)\,K(1)\,K(2)} x^3 + \cdots$$

højst være af Typen $\tau + h$.

Laguerre paastaar at have bevist en Sætning[1]), der fremgaar som et meget specielt Tilfælde heraf, nemlig det hvor $F(x)$ er rational (og altsaa af endelig Grad), $\tau = 0$, $h = 0$, medens dog $K(x)$ kan være af 1^{ste} Rang. Den sidste Betingelse er imidlertid *urigtig*. Da *Laguerre* ikke har gennemført sit Bevis, kan man ikke se, hvor Fejlen ligger.

Den Sætning, jeg nu skal bevise, er af en ganske anden Karakter end de hidtil omtalte.

Lad $F(z)$ være en hel Funktion af den komplekse variable $z = x + iy$. Den antages at være reel og af 0^{te} eller 1^{ste} Rang og af Typen 0. Man har altsaa det endelige eller ogsaa absolut konvergente Produkt

[1]) Acta Mathematica, B. IV, 1884 og Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3. Række, B. IX, 1883; Oeuvres, I, S. 202 og 35.

$$F(z) = e^{c_0 + c_1 z} z^{\mu} \prod_{(\alpha)} \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) e^{\frac{z}{\alpha}},$$

hvor Konstanterne c_0 og c_1 samt Rødderne α alle er reelle. Danner jeg nu Kvadratet paa den absolute Værdi af $F(z)$, har jeg øjensynligt

$$|Fz|^2 = e^{2c_0 + 2c_1 x}(x^2 + y^2)^{\mu} \prod \frac{(x-\alpha)^2 + y^2}{\alpha^2} e^{2\frac{x}{\alpha}}$$

$$= (Fx)^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{\mu} \prod \left(1 + \frac{y^2}{(x-\alpha)^2}\right).$$

Udvikles dette efter Potenser af y^2, faar vi saaledes

$$|Fz|^2 = A_0 + A_2 y^2 + A_4 y^4 + \cdots,$$

hvor Koefficienterne er *positive* Funktioner af x for enhver reel Værdi af x, som er forskellig fra en Rod α. Ved Taylor's Række og ifølge Leibniz' Formel for Differentiation af et Produkt, ser man, at

$$\underline{|2\nu}\, A_{2\nu} = (-1)^{\nu} D^{2\nu}_{\rho=0} (F(x+\rho)\, F(x-\rho))$$

$$= \binom{2\nu}{\nu} (F^{(\nu)} x)^2 - 2 \binom{2\nu}{\nu - 1} F^{(\nu-1)}(x) F^{(\nu+1)}(x) + \cdots + (-1)^{\nu} \cdot 2F(x) F^{(2\nu)}(x).$$

Det er altsaa en *nødvendig* Betingelse for, at $F(z)$ skal være af Typen 0, at alle disse Funktioner for $\nu = 1, 2, 3, \cdots$ skal være positive eller Nul[1]), naar x er reel. Omvendt er det indlysende, at disse Betingelser tillige maa være *tilstrækkelige*, thi hvis de alle er opfyldt, er $|Fz|^2$ for x konstant ingensinde aftagende med voksende y^2, og for $y = 0$, er $|Fz|^2 = (Fx)^2$. Naar $Fx \neq 0$, maa $|Fz|^2 > 0$; og for $F(x) = 0$, kan heller ikke $|Fz|^2 = 0$ for noget $y \neq 0$. Var det Tilfældet maatte $|Fz|^2$ konstant være Nul, men dette er umuligt, naar $F(z)$ ikke netop reducerer sig til Nul.

Disse nødvendige og tilstrækkelige Betingelser, som er fundet paa en saa overordentlig simpel Maade, er imidlertid ofte vanskelige at anvende i Praksis paa en forelagt Funktion.

---

[1]) Tilfældet $\nu = 1$ giver os den nødvendige Betingelse $(F'x)^2 - F(x)F''(x) > 0$, som er fundet af Laguerre. Naar man vil være absolut korrekt, maa man dog til Ulighedstegnet føje et Lighedstegn. Naar Lighedstegnet ikke kan indtræde, og $F(x)$ har alle Rødder reelle, er der ingen *lige* Rødder. Jeg kan ikke her gaa i ydderligere Detailler.

Hvis vi differentierer $|Fz|^2$ med Hensyn til y, finder vi

$$\frac{\partial}{\partial y}|Fz|^2 = 2A_2 y + 4A_4 y^3 + \cdots.$$

Heraf udledes følgende.

Naar $F(z)$ er af 0[te] eller 1[ste] Rang, reel og af Typen 0, maa

$$(5)\quad \frac{\partial}{\partial y}|Fz|^2 = 2\Re\left(\frac{1}{i}F(z)F'(\bar{z})\right) = \frac{1}{2}(|Fz + iF'z|^2 - |Fz - iF'z|^2) > 0,$$

for $y > 0$; (for $y < 0$ skal Ulighedstegnet blot vendes om paa Grund af Symmetrien med Hensyn til den reelle Akse). Denne nødvendige Betingelse er imidlertid ogsaa tilstrækkelig, selv om $>$ erstattes med $\geqq$. Af Uligheden følger nemlig, at $|Fz|^2$, hvori x *betragtes som konstant*, maa vokse med y positiv eller være konstant, og da denne Funktion er lig med $(Fx)^2 \geqq 0$ for $y = 0$, kan $|Fz|^2$ kun blive Nul for et $y > 0$, naar $|Fz|^2$ er konstant og lig 0.

Altsaa er følgende Sætning bevist:

Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at $F(z)$ *er af Typen* 0, *er at Uligheden* (5) *er opfyldt i den Halvplan, som ligger over den reelle Akse; ja det er endog en tilstrækkelig Betingelse, naar* $>$ *erstattes med* $\geqq$ [1]).

Med andre Ord: *naar man i den øverste Halvplan kan finde en Værdi af z, for hvilken* $\frac{\partial}{\partial y}|Fz|^2$ *er negativ, maa* $F(z)$ *have imaginære Rødder; kan man ikke det, er alle Rødder reelle.*

Af Rækkeudviklingen for $\frac{\partial}{\partial y}|Fz|^2$ har vi hidtil kun benyttet den Egenskab, at den for positive y ikke har en negativ Sum. Vil man gøre den nødvendige Betingelse saa snæver som muligt, kan man opnaa dette ved at betragte eet eller flere Led af Rækkeudviklingen. Man finder saaledes som nødvendig Betingelse:

$$\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}|Fz|^2 \geqq 4\left((F'x)^2 - F(x)F''(x)\right) \geqq 0$$

i hele Planen, o. s. v., o. s. v.

[1]) Det er naturligvis kun tilsyneladende, at den tilstrækkelige Betingelse i sin Form er mere omfattende end den nødvendige. For Anvendelserne er dette en Fordel. I det følgende gør jeg Forskellen mellem den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse endnu større.

Ved at stille mine Betragtninger lidt mere almindeligt kan jeg forøvrigt bevise følgende mere omfattende Sætning:

Hvis

$$\frac{\partial}{\partial y} |Fz|^2 \quad \text{eller} \quad |Fz + iF'z|^2 - |Fz - iF'z|^2$$

er positiv overalt i den øverste Halvplan, med Undtagelse af en vis endelig Del deraf, saa har den reelle Funktion $F(z)$, af 0^{te} *eller* 1^{ste} *Rang, sin Type endelig.*

Man kan give disse Sætninger mange andre Former, som jeg ikke her kan komme ind paa, og hvorom jeg maa henvise til mine udførlige Undersøgelser. Kun følgende skal omtales.

Betragter jeg Rækkeudviklingen

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} |Fz|^2 = 2A_2 + 4 \cdot 3 A_4 y^2 + \cdots,$$

ser jeg straks, *at*

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} |Fz|^2 &= 2|F'z|^2 - 2\Re\left(F(z)\, F''(\bar{z})\right) \\ &= 2|F'z|^2 - \tfrac{1}{2}|Fz + F''z|^2 + \tfrac{1}{2}|Fz - F''z|^2 \\ &\geqq 2A_2 = 4\left((F'x)^2 - F(x)\, F''(x)\right) \geqq 0 \end{aligned} \right.$$

er en nødvendig Betingelse for, at alle Rødder skal være reelle. Er overalt

$$(7) \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} |Fz|^2 \geqq 0$$

maa omvendt $F(z)$ være af Typen 0.

$|Fz|^2$ er nemlig da en konveks Funktion af y, som paa Grund af Symmetrien med Hensyn til den reelle Akse kun kan have et Minimum for $y = 0$.

Ligesom ovenfor har man ogsaa her den udvidede Sætning:

Naar Uligheden (7) *er opfyldt udenfor en vis endelig Del af z-Planen, er $F(z)$ af endelig Type.*

Det er ganske interessant at anvende disse Sætninger paa de hidtil i Litteraturen behandlede transcendente Ligninger. Eksempler kan tages hos *Fourier, Poisson, Cauchy, Hurwitz* m. fl. og vil give et Begreb om, hvor let disse nye Kriterier kan anvendes paa simplere Tilfælde. For lige at nævne et Eksempel (efter *Cauchy*) betragter vi den bekendte Ligning $\sin z - z \cos z = 0$. Sættes venstre Side heraf lig $F(z)$, har man

$$|F'z|^2 - \Re\left(F(z)F''(\bar z)\right) = |z\sin z|^2 - \Re(\sin z - z\cos z)(\sin\bar z + \bar z\cos\bar z)$$
$$= |z\sin z|^2 - |\sin z|^2 + |z\cos z|^2$$
$$= (x^2\mathrm{ch}^2 y - \sin^2 x) + (y^2\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y) + (x^2+y^2)\,\mathrm{sh}^2 y,$$

hvor alle Parenteser er $\geqq 0$. Altsaa er alle Rødder reelle.

For Funktioner af højere Rang end den 1ste gælder tilsvarende, men noget mere komplicerede Kriterier.

Lad $F(z)$ være reel og af $2p^{\text{te}}$ eller $2p+1^{\text{ste}}$ Rang, da er, idet vi for Simpelheds Skyld antager, at der ingen Rødder Nul findes,

$$F(z) = e^{g(z)} \prod_{(\alpha)} \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) e^{\frac{z}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{2p+1}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{2p+1}},$$

hvor

$$g(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{2p+1} z^{2p+1}$$

har alle Koefficienterne reelle, og det endelige eller absolut konvergente Produkt udstrækkes til alle Rødder α.

Hvis $F(z)$ er af Rangen $2p$, skal $c_{2p+1} = -\frac{1}{2p+1}\sum \frac{1}{\alpha^{2p+1}}$. c'erne bestemmes som bekendt let ved Differentiation af $\log F(z)$.

Den nødvendige Betingelse for, at alle Rødder er reelle, er at man i Halvplanen $y > 0$ stedse har

$$|z^{2p}Fz + iF'z|^2 - |z^{2p}Fz - iF'z|^2 > |Fz|^2\left(|z^{2p} + ig'z|^2 - |z^{2p} - ig'z|^2\right),$$

og den tilstrækkelige Betingelse er af samme Form, idet man dog kan erstatte $>$ med $\geqq$.

Beviset for denne Sætning, som for $p = 0$ reducerer sig til en ovenfor angivet, kan jeg ikke her komme ind paa.

Til Slutning maa jeg have Lov til at gøre Brug af en maaske lidt hasarderet, men anskuelig Betragtning. Lad $F(z)$ være en analytisk Funktion af $z = x + iy$, regulær indenfor et vist Omraade af z-Planen. Jeg tænker mig denne vandret og oprejser i hvert af dens Punkter en lodret Koordinat $\zeta = |Fz|^2$. Herved fremkommer der en Flade med de retvinklede Koordinater x, y, ζ, om hvilken jeg har bevist følgende[1]).

[1]) Nyt Tidsskrift f. Matematik, Bd. XXI, 1910. Om den absolute Værdi af en analytisk Funktion (Resumé af et Foredrag i Matematisk Forening d. 19. Marts 1908).

Betegnes ved φ Toplansvinklen imellem (x, y) Planen og Tangentplanen i Punktet (x, y, ζ), er

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = 4 \, | F(z) F'(z) |^2 .$$

Tangentplanen er kun vandret i de af Fladens Punkter, hvis Projektioner falder i Nulpunkterne af $F(z)$ eller af $F'(z)$. I de første falder Tangentplanen sammen med z-Planen, i de af de sidste, som ikke tillige er Nulpunkter i $F(z)$, er Tangentplanen en Vendetangentplan.

Man kunde kalde en saadan Flade et »analytisk Landskab«. Tænkte man sig, at det regnede i dette Landskab, vilde Regnen samle sig i de laveste Punkter og danne smaa Søer omkring Nulpunkterne af $F(z)$. For en reel Funktion af 0[te] eller 1[ste] Rang og af Typen 0 vilde det »analytiske Landskab« have en Dalsænkning med smaa Søer langs den reelle Akse.
